Pratique Supplémentaire 10 (Corrigé)

Cette série fait suite aux chapitres 6.1 6.2 6.3 du livre *Algèbre Linéaire et applications* de D. Lay, aussi bien que certains concepts vus au cours.

Remarques : il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours.

Exercice 1

Soit V une espace euclidien. On note $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v} \in V$ et la norme associée est $\|\vec{u}\| = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle}$. Par exemple, considérez que $V = \mathbb{R}^n$ et on utilise le produit scalaire habituel $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}^\top \vec{v}$.

Montrer :

a) Si $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ est une famille orthonormale, alors $\|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{2}$.

b) $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \frac{1}{4}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$ pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in V$.

c) $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2\right)$ pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in V$.

Sol.:

a) $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \langle (\vec{u} - \vec{v}), (\vec{u} - \vec{v}) \rangle = \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle - 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\|^2 - 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \|\vec{v}\|^2 = 1 - 0 + 1 = 2$, donc $\|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{2}$.

b) $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \langle (\vec{u} + \vec{v}), (\vec{u} + \vec{v}) \rangle - \langle (\vec{u} - \vec{v}), (\vec{u} - \vec{v}) \rangle =$
$\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle - \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle - \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 4\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$.

c) $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \langle (\vec{u} + \vec{v}), (\vec{u} + \vec{v}) \rangle + \langle (\vec{u} - \vec{v}), (\vec{u} - \vec{v}) \rangle =$
$\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle - 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 2\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle + 2\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 2\|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{v}\|^2$.
Remarque : l'égalité c) s'appelle "identité du parallélogramme".

Exercice 2

Soit A une matrice de taille $m \times n$.

a) Montrer que $\mathrm{Ker}A = \mathrm{Ker}(A^T A)$.

b) Montrer que $A^T A$ est inversible si et seulement si les colonnes de A sont linéairement indépendantes.

Sol.:

a) Si $A\vec{x} = \vec{0}$, alors $A^T A\vec{x} = \vec{0}$, ce qui montre $\mathrm{Ker}A \subset \mathrm{Ker}(A^T A)$. Soit maintenant $\vec{x}$ tel que $A^T A\vec{x} = \vec{0}$, alors $\vec{x}^T A^T A\vec{x} = 0$. Or, $\vec{x}^T A^T A\vec{x} = (A\vec{x})^T(A\vec{x}) = \|A\vec{x}\|^2$. Ainsi, $A\vec{x} = \vec{0}$, et $\mathrm{Ker}(A^T A) \subset \mathrm{Ker}A$. D'où l'égalité.

b) Les colonnes de $A = (\overrightarrow{a}_1 \ldots \overrightarrow{a}_n)$ sont linéairement indépendantes

$$\Longleftrightarrow \left(\beta_1 \overrightarrow{a}_1 + \ldots + \beta_n \overrightarrow{a}_n = \overrightarrow{0} \;\Rightarrow\; \beta_1 = \ldots = \beta_n = 0\right)$$

$$\Longleftrightarrow \left(A \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \overrightarrow{0} \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \overrightarrow{0} \right)$$

$$\Longleftrightarrow \mathrm{Ker} A = \{\overrightarrow{0}\}.$$

Ainsi, d'après a), les colonnes de A sont linéairement indépendantes si et seulement si $\mathrm{Ker}(A^T A) = \{\overrightarrow{0}\}$, c'est-à-dire la matrice (carrée) $A^T A$ est inversible.

Exercice 3

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

a) Une base d'un sous-espace vectoriel W de $\mathbb{R}^n$ qui est un ensemble de vecteurs orthogonaux est appelée une base orthonormale. ☐ ☐

b) Un ensemble $S = \{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_p\}$ orthogonal de vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$ est linéairement indépendant et de ce fait est une base du sous-espace qu'il engendre. ☐ ☐

c) Une base orthonormale est une base orthogonale mais la réciproque est fausse en général. ☐ ☐

d) Si $\overrightarrow{x}$ n'appartient pas au sous-espace vectoriel W, alors $\overrightarrow{x} - \overrightarrow{p}_W(\overrightarrow{x})$ n'est pas nul (ici $\overrightarrow{p}_W(\overrightarrow{x})$ désigne la projection orthogonale de $\overrightarrow{x}$ sur W. ☐ ☐

Sol.: Vrai : b), c), d). Faux : a).

a) Faux, il manque la condition que les vecteurs de base doivent être de norme égale à 1.

b) Vrai. En effet, soient $u, v \neq 0$ et montrons que si u est orthogonal à v alors les vecteurs u et v sont linéairement indépendants. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda u + \mu v = 0$ et supposons que $< u, v >= 0$. On a que $< \lambda u + \mu v, v >= 0$ et donc, par les propriétés du produit scalaire on trouve $\lambda < u, v > +\mu < v, v >= 0$. Comme $< u, v >= 0$ par hypothèse on trouve que $\mu < v, v >= 0$ et puisque $v \neq 0$ on a que $< v, v >\neq 0$ donc $\mu = 0$. De même on trouve que $\lambda = 0$ et donc u et v sont linéairement indépendants.

c) Vrai, par définition toute base orthonormale est formée de vecteurs orthogonaux. Par contre la base $\{2e_1, 2e_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ est orthogonale mais pas orthonormale.

d) Vrai. Si $\overrightarrow{x} \notin W$, alors $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{p}_W(\overrightarrow{x})$ car $\overrightarrow{p}_W(\overrightarrow{x}) \in W$ par définition et donc $\overrightarrow{x} - \overrightarrow{p}_W(\overrightarrow{x}) \neq 0$.